1 Vermoeden: $\angle ACB$ is constant (in figuur 12.1 als punt C over de bovenste boog AB loopt).

2a *

2b *

2c Vermoeden: $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle ACB$.

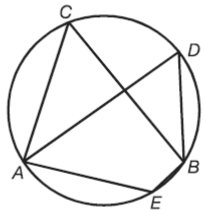
3a *

3b Vermoeden: De drie cirkels gaan door één punt.

3c Vermoeden: De drie lijnstukken gaan door één punt.

4a Gegeven: De punten C en D op dezelfde cirkelboog AB.
Te bewijzen: $\angle C = \angle D$.
Bewijs: Teken een punt E op de cirkelboog AB waarop niet de punten C en D liggen.

$$\left.\begin{array}{l}\angle C + \angle E = 180^\circ \text{ (}AEBC\text{ is een koordenvierhoek)}\\ \angle D + \angle E = 180^\circ \text{ (}AEBD\text{ is een koordenvierhoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle C = \angle D.$$

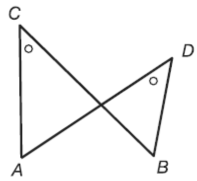


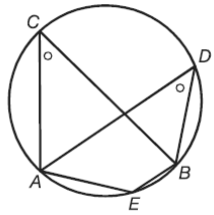
4b Uit de stelling van de constante hoek volgt dat $\angle ACB$ overal op een cirkelboog AB gelijk is.

5a Gegeven: De punten A, B, C en D met C en D aan dezelfde kant van AB en $\angle C = \angle D$.
Te bewijzen: C en D liggen op dezelfde cirkelboog AB.
Bewijs: Teken de cirkel door de punten A, B en C.

$$\left.\begin{array}{l}\angle C + \angle E = 180^\circ \text{ (}AEBC\text{ is een koordenvierhoek)}\\ \angle C = \angle D \text{ (gegeven)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle D + \angle E = 180^\circ.$$

Dus $AEBD$ is een koordenvierhoek.
Hieruit volgt dat C en D op dezelfde cirkelboog AB liggen.



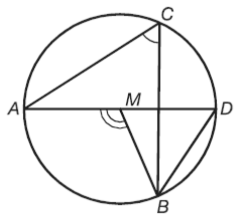


5b In vierhoek $ABCD$ liggen C en D aan dezelfde kant van AB.
Als $\angle ADB = \angle ACB$, dan liggen C en D op dezelfde cirkelboog AB (constante hoek),
dus A, B, C, en D liggen op één cirkel $\Rightarrow ABCD$ is een koordenvierhoek.

6a Gegeven: De punten A, B, en C op de cirkel met middelpunt M (zie figuur 12.4a).
Te bewijzen: $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AMB$.
Bewijs: Verleng AM. Zo ontstaat de middellijn AD.

$$\left.\begin{array}{l}\angle ACB = \angle ADB \text{ (constante hoek)}\\ \angle MDB = \angle MBD \text{ (gelijkbenige driehoek)}\\ \angle MDB + \angle MBD + \angle BMD = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

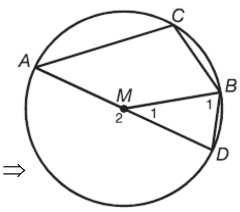
$$\left.\begin{array}{l}2 \cdot \angle ACB + \angle BMD = 180^\circ\\ \angle AMB + \angle BMD = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot \angle ACB = \angle AMB \Rightarrow \angle ACB = \frac{1}{2}\angle AMB.$$



6b Gegeven: De punten A, B, en C op de cirkel met middelpunt M (zie figuur 12.4b).
Te bewijzen: $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AMB$.
Bewijs: Verleng AM. Zo ontstaat de middellijn AD.

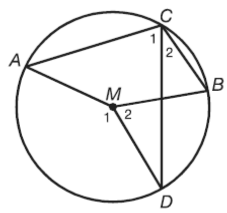
$$\left.\begin{array}{l}\angle D = 180^\circ - \angle C \text{ (koordenvierhoek)}\\ \angle B_1 = \angle D \text{ (gelijkbenige driehoek)}\\ \angle M_1 + \angle D + \angle B_1 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle M_1 + 180^\circ - \angle C + 180^\circ - \angle C = 180^\circ\\ \angle M_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\angle M_1 + \angle M_2 = 2 \cdot \angle C \Rightarrow \angle M_{12} = 2 \cdot \angle C \Rightarrow \tfrac{1}{2}\angle M_{12} = \angle C \text{ ofwel } \angle ACB = \tfrac{1}{2}\angle AMB.$$



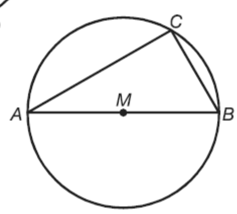
Alternatieve uitwerking
Gegeven: De punten A, B, en C op de cirkel met middelpunt M (zie figuur 12.4b).
Te bewijzen: $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AMB$.
Bewijs: Teken punt D op de cirkel zoals hiernaast en teken CD en DM.

$$\left.\begin{array}{l}\angle C_1 = \frac{1}{2}\angle M_1 \text{ (onderdeel 6a)}\\ \angle C_2 = \frac{1}{2}\angle M_2 \text{ (onderdeel 6a)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle C_{12} = \tfrac{1}{2}\angle M_{12} \text{ ofwel } \angle ACB = \tfrac{1}{2}\angle AMB.$$



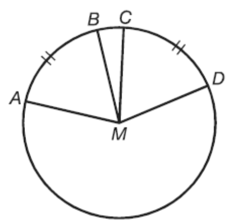
6c Gegeven: De punten A, B, en C op de cirkel met middelpunt M (zie de figuur hiernaast).
Te bewijzen: $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AMB$.
Bewijs:

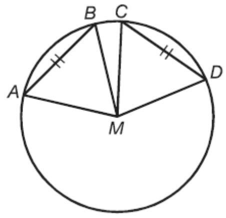
$$\left.\begin{array}{l}\angle ACB = 90^\circ \text{ (Thales)}\\ \angle AMB = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle ACB = \tfrac{1}{2}\angle AMB.$$



7a Gegeven: Een cirkel met middelpunt M en de gelijke bogen AB en CD.
Te bewijzen: $AB = CD$.
Bewijs:

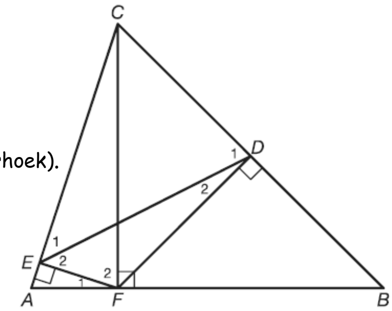
$$\left.\begin{array}{l}\text{boog } AB = \text{boog } CD \Rightarrow \angle AMB = \angle CMD\\ AM = BM = CM = DM \text{ (straal van de cirkel)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMB \cong \Delta CMD \text{ (ZHZ)} \Rightarrow AB = CD.$$





7b Gegeven: Een cirkel met middelpunt M en de gelijke koorden AB en CD.
Te bewijzen: boog $AB =$ boog CD.
Bewijs:

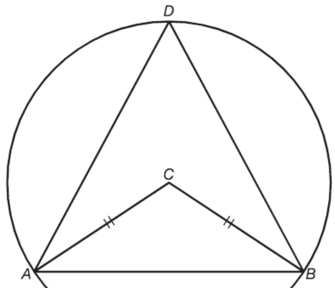
$$\left.\begin{array}{l} AB = CD \\ AM = BM = CM = DM \text{ (straal van de cirkel)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta AMB \cong \Delta CMD \text{ (ZZZ)} \Rightarrow \angle AMB = \angle CMD \Rightarrow \text{boog } AB = \text{boog } CD.$$



8 Gegeven: Driehoek ABC met hoogtelijn CF en met $FD \perp BC$ en $FE \perp AC$.
Te bewijzen: $\angle CDE = \angle A$.
Bewijs: Teken DE.

$\angle E_{12} + \angle D_{12} = 90^\circ + 90^\circ$, dus $CDFE$ is een koordenvierhoek (koordenvierhoek).

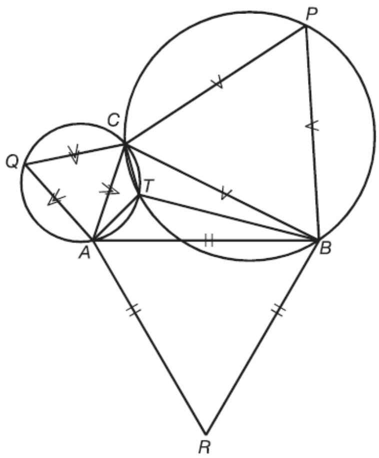
$$\left.\begin{array}{l} \text{Dus } \angle D_1 = \angle F_2 \text{ (constante hoek)} \\ \left.\begin{array}{l} \text{In } \Delta AEF \text{ is } \angle A = 90^\circ - \angle F_1 \\ \angle F_2 = 90^\circ - \angle F_1 \text{ (rechte hoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle F_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle D_1 = \angle A \text{ ofwel } \angle CDE = \angle A.$$



9 Gegeven: De gelijkbenige driehoek ABC met $AC = BC$ en het punt P met $\angle CDE = \frac{1}{2}\angle ACB$ aan dezelfde kant van AB als C (zie figuur 12.4b).
Te bewijzen: $BC = CP$.
Bewijs: Teken de cirkel met middelpunt C en straal AC.
Punt D ligt op de boog AB aan dezelfde kant van AB als C.

$$\left.\begin{array}{l} \angle D = \frac{1}{2}\angle ACB \text{ (omtrekshoek)} \\ \angle P = \frac{1}{2}\angle ACB \text{ (gegeven)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle D = \angle P.$$

Hieruit volgt dat D en P op de zelfde cirkelboog AB met middelpunt C liggen (constante hoek) dus $BC = CP$ (straal van de cirkel).



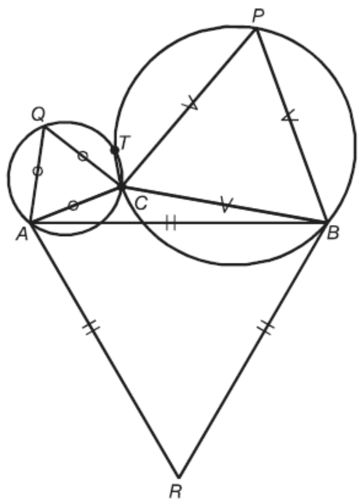
10a Gegeven: ΔABC met de naar buiten gerichte gelijkzijdige driehoeken BCP, ACQ en ABR (zie figuur 12.7).
Te bewijzen: De omgeschreven cirkels van de driehoeken BCP, ACQ en ABR gaan door één punt.
Bewijs: De omgeschreven cirkels van de driehoeken BCP en ACQ snijden elkaar binnen ΔABC in het punt T.

$$\left.\begin{array}{l} \angle P + \angle BTC = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \\ \angle P = 60^\circ \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle BTC = 120^\circ \textbf{ (1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle Q + \angle ATC = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \\ \angle Q = 60^\circ \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ATC = 120^\circ \textbf{ (2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Uit } \textbf{(1)} \text{ en } \textbf{(2)} \text{ volgt } \angle ATB = 120^\circ \\ \angle R = 60^\circ \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ATB + \angle R = 180^\circ$$

Dus $ATBR$ is een koordenvierhoek (koordenvierhoek),
dus T ligt op de omgeschreven cirkel van driehoek ABR.
Hieruit volgt dat de drie omgeschreven cirkels door één punt gaan.



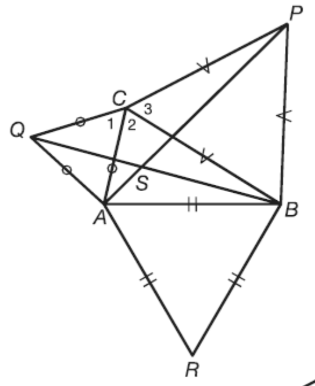
10b Gegeven: ΔABC met $\angle ACB > 120^\circ$ en de naar buiten gerichte gelijkzijdige driehoeken BCP, ACQ en ABR.
Te bewijzen: De omgeschreven cirkels van de driehoeken BCP, ACQ en ABR gaan door één punt.
Bewijs: De omgeschreven cirkels van de driehoeken BCP en ACQ snijden elkaar buiten ΔABC in het punt T.

$$\left.\begin{array}{l} \angle P = \angle BTC \text{ (constante hoek)} \\ \angle P = 60^\circ \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle BTC = 60^\circ \textbf{ (1)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle Q = \angle ATC \text{ (constante hoek)} \\ \angle Q = 60^\circ \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ATC = 60^\circ \textbf{ (2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Uit } \textbf{(1)} \text{ en } \textbf{(2)} \text{ volgt } \angle ATB = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ \\ \angle R = 60^\circ \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ATB + \angle R = 180^\circ$$

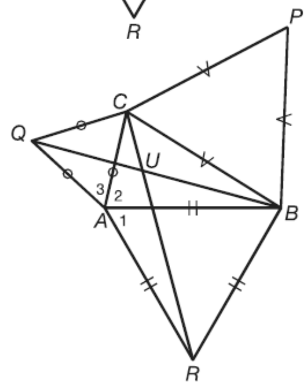
Dus $ATBR$ is een koordenvierhoek (koordenvierhoek),
dus T ligt op de omgeschreven cirkel van driehoek ABR.
Hieruit volgt dat de drie omgeschreven cirkels door één punt gaan.



11a $\left.\begin{array}{l}\angle C_1 = \angle C_3 = 60^\circ \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \Rightarrow \angle C_{12} = \angle C_{23} \\ QC = AC \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \\ BC = PC \text{ (gelijkzijdige driehoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta QBC \cong \Delta APC \text{ (ZHZ).}$

11b $\Delta QBC \cong \Delta APC \Rightarrow \angle CQB = \angle CAP$ ofwel $\angle CQS = \angle CAS$.
Hieruit volgt dat Q en A op dezelfde cirkelboog CS liggen (constante hoek),
dus $AQCS$ is een koordenviehoek.

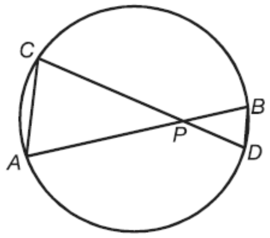
11c $\left.\begin{array}{l}\angle A_1 = \angle A_3 = 60^\circ \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \Rightarrow \angle A_{12} = \angle A_{23} \\ AQ = AC \text{ (gelijkzijdige driehoek)} \\ AB = AR \text{ (gelijkzijdige driehoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta QBA \cong \Delta CRA \text{ (ZHZ).}$
$\Delta QBA \cong \Delta CRA \Rightarrow \angle AQB = \angle ACR$ ofwel $\angle AQU = \angle ACU$.
Hieruit volgt dat Q en C op dezelfde cirkelboog AU liggen (constante hoek),
dus $AQCU$ is een koordenviehoek.



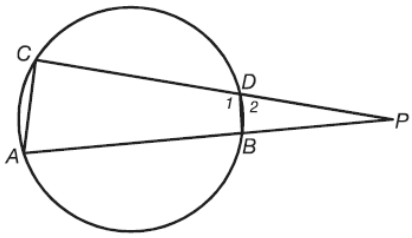
11d S op BQ en uit 11b volgt dat S op de omgeschreven cirkel van ΔAQC ligt
U op BQ en uit 11c volgt dat U op de omgeschreven cirkel van ΔAQC ligt
Dus S en U zijn hetzelfde punt, ofwel AP, BQ en CR snijden elkaar in één punt.

11e Het snijpunt van AP, BQ en CR ligt op de omgeschreven cirkel van ΔAQC (zie 11d)
Uit $\Delta QBC \cong \Delta APC$ (zie 11a) volgt op dezelfde manier als in 11b en 11d dat
het snijpunt van AP, BQ en CR op de omgeschreven cirkel van ΔBPC ligt.
Dus het snijpunt van AP, BQ en CR is het punt T van opgave 10.

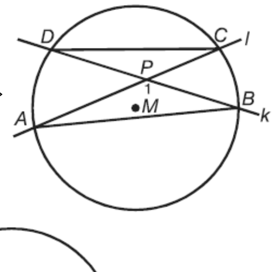
12a Gegeven: De punten A, B, C en D op een cirkel zo, dat de
lijnen AB en CD elkaar binnen de cirkel snijden in P.
Te bewijzen: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.
Bewijs: Teken de lijnstukken AC en BD.
$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D \text{ (constante hoek)} \\ \angle B = \angle C \text{ (constante hoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACP \backsim \Delta DBP \text{ (hh)}$
Hieruit volgt $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, dus (neem kruisproducten) $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.



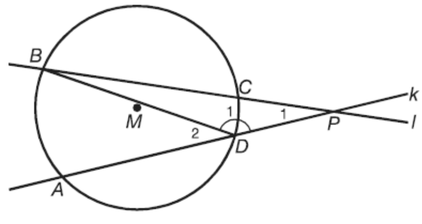
12b Gegeven: De punten A, B, C en D op een cirkel zo, dat de
lijnen AB en CD elkaar buiten de cirkel snijden in P.
Te bewijzen: $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.
Bewijs: Teken de lijnstukken AC en BD.
$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle D_1 = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \\ \angle D_1 + \angle D_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle D_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \angle P = \angle P\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta APC \backsim \Delta DPB \text{ (hh)}$
Hieruit volgt $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, dus (neem kruisproducten) $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.



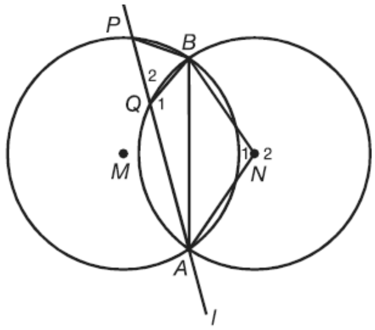
13a Bewijs: Teken AB en CD.
$\left.\begin{array}{l}\angle P_1 + \angle A + \angle B = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle A = \frac{1}{2}\angle BMC \text{ (omtrekshoek)} \\ \angle B = \frac{1}{2}\angle AMD \text{ (omtrekshoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\angle P_1 + \frac{1}{2}\angle BMC + \frac{1}{2}\angle AMD = 180^\circ \\ \angle AMB + \angle BMC + \angle CMD + \angle AMD = 360^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow$
$P_1 + \cancel{\frac{1}{2}\angle BMC} + \cancel{\frac{1}{2}\angle AMD} = \frac{1}{2}\angle AMB + \cancel{\frac{1}{2}\angle BMC} + \frac{1}{2}\angle CMD + \cancel{\frac{1}{2}\angle AMD}$
Dus $\angle APB = \frac{1}{2}\angle AMB + \frac{1}{2}\angle CMD = \frac{1}{2}(\angle AMB + \angle CMD)$.



13b Bewijs: Teken BD.
$\left.\begin{array}{l}\angle D_1 + \angle P + \angle B = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle D_1 + \angle D_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}\angle P + \angle B = \angle D_2 \\ \angle B = \frac{1}{2}\angle CMD \text{ (omtrekshoek)} \\ \angle D_2 = \frac{1}{2}\angle AMB \text{ (omtrekshoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow$
$\angle P + \frac{1}{2}\angle CMD = \frac{1}{2}\angle AMB \Rightarrow \angle APB = \frac{1}{2}\angle AMB - \frac{1}{2}\angle CMD = \frac{1}{2}(\angle AMB - \angle CMD)$.



14 Gegeven: Twee cirkels met gelijke straal die elkaar snijden in A en B.
De lijn l door A snijdt de cirkels in P en Q.
Te bewijzen: Driehoek BPQ is gelijkbenig.
Bewijs: Noem het middelpunt van de linker cirkel M en van de rechter cirkel N.
Teken BP, BQ, AB, AN en BN.



$$\left.\begin{array}{l} MA = MB = NA = NB \text{ (= straal)} \\ AB = AB \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta MAB \cong \Delta NAB \text{ (ZZZ)} \Rightarrow \angle AMB = \angle N_1.$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle Q_1 = \tfrac{1}{2}\angle N_2 \text{ (omtrekshoek)} \\ \angle N_1 + \angle N_2 = 360° \Rightarrow \angle N_2 = 360° - \angle N_1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \Rightarrow \angle Q_1 = 180° - \tfrac{1}{2}\angle N_1 \\ \angle Q_1 = 180° - \angle Q_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \angle Q_2 = \tfrac{1}{2}\angle N_1 \\ \angle AMB = \angle N_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle Q_2 = \tfrac{1}{2}\angle AMB \\ \angle P = \tfrac{1}{2}\angle AMB \text{ (omtrekshoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle P = \angle Q_2 \Rightarrow \text{driehoek } BPQ \text{ is gelijkbenig.}$$

15a $\left.\begin{array}{l} AD^2 + CD^2 = AC^2 \\ CD > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow AC^2 > AD^2 \Rightarrow AC > AD.$

15b $\left.\begin{array}{l} BD^2 + CD^2 = BC^2 \text{ (Pythagoras)} \\ CD > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow BC^2 > BD^2 \Rightarrow BC > BD.$

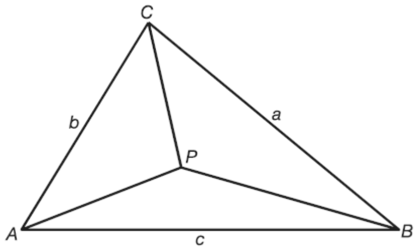
15c $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} AC > AD \text{ (15a)} \\ BC > BD \text{ (15b)} \end{array}\right\} \Rightarrow AC + BC > AD + BD \\ AD + BD = AB \end{array}\right\} \Rightarrow AC + BC > AB.$

16 Gegeven: ΔABC met een willekeurig punt P binnen deze driehoek.
Te bewijzen: $PA + PB + PC > s$.
Bewijs: Teken de lijnstukken PA, PB en PC.

$$\left.\begin{array}{l} PA + PB > c \text{ (driehoeksongelijkheid)} \\ PB + PC > a \text{ (driehoeksongelijkheid)} \\ PC + PA > b \text{ (driehoeksongelijkheid)} \end{array}\right\} \Rightarrow 2PA + 2PB + 2PC > a + b + c$$

$$PA + PB + PC > \tfrac{1}{2}(a + b + c)$$

$$PA + PB + PC > s.$$



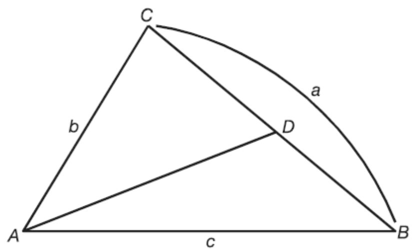
17 Gegeven: ΔABC met een willekeurig punt D op BC.
Te bewijzen: $AD < s$.
Bewijs: Teken lijnstuk AD.

$$\left.\begin{array}{l} AD < CD + b \text{ (driehoeksongelijkheid)} \\ AD < BD + c \text{ (driehoeksongelijkheid)} \end{array}\right\} \Rightarrow 2AD < CD + BD + b + c$$

$$2AD < a + b + c$$

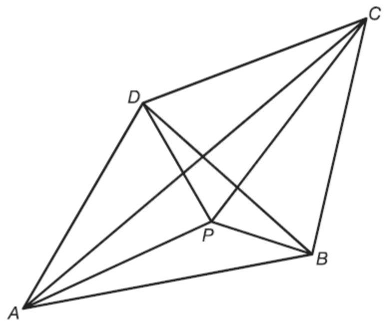
$$AD < \tfrac{1}{2}(a + b + c)$$

$$AD < s.$$



18 Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met een punt P niet op een van de diagonalen.
Te bewijzen: $AP + BP + CP + DP > AC + BD$.
Bewijs: Teken AP, BP, CP, DP en de diagonalen AC en BD.

$$\left.\begin{array}{l} AP + CP > AC \text{ (driehoeksongelijkheid)} \\ BP + DP > BD \text{ (driehoeksongelijkheid)} \end{array}\right\} \Rightarrow AP + BP + CP + DP > AC + BD.$$



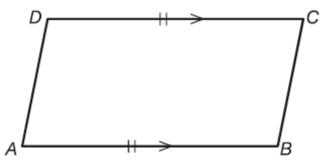
19a Dit volgt uit de driehoeksongelijkheid.

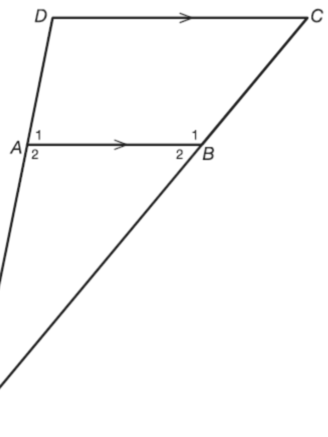
19b $AB + BC > AC$ is in tegenspraak met $AB + BC = AC$, dus de veronderstelling dat B niet op de lijn AC ligt is onjuist $\Rightarrow$ B ligt op de lijn AC.

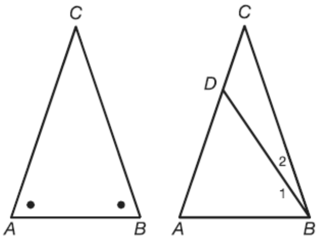
20 Gegeven: Vierhoek $ABCD$ met $AB = CD$ en $AB \,//\, CD$.
Te bewijzen: $AD \,//\, BC$ ($//$ betekent "is evenwijdig met").
Bewijs: Veronderstel dat niet geldt $AD \,//\, BC$, dan snijden AD en BC elkaar in een punt S.
(zie de rechter figuur hiernaast)

$$\left.\begin{array}{l} \angle S = \angle S \\ \angle A_2 = \angle D \text{ (F-hoeken)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABS \backsim \Delta DCS \text{ (hh)} \Rightarrow \frac{AB}{DC} = \frac{AS}{DS}.$$

Omdat $AS \neq DS$ is $AB \neq DC$ ($\neq$ betekent "is niet gelijk aan").
Dit is in tegenspraak met $AB = CD$.
De veronderstelling dat AD niet evenwijdig is met BC is dus onjuist $\Rightarrow AD \,//\, BC$.







21 Gegeven: ΔABC met $\angle A = \angle B$. Te bewijzen: $AC = BC$.
Bewijs: Veronderstel dat $AC > BC$, dan is er een punt D op AC zo, dat $AD = BC$.

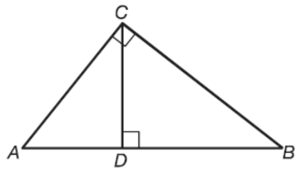
$$\left.\begin{array}{l} AD = BC \\ \angle A = \angle B_{12} \\ AB = AB \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABD \cong \Delta BAC \text{ (ZHZ)} \Rightarrow \angle B_1 = \angle A.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dit is in tegenspraak met het gegeven} \Rightarrow \text{er geldt niet } AC > BC \\ \text{Op dezelfde manier leidt de veronderstelling } AC < BC \text{ tot een tegenspraak} \end{array}\right\} \Rightarrow AC = BC.$$

22a $O(\Delta ADC) = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot h$(oogte trapezium)
$O(\Delta BDC) = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot h$(oogte trapezium)
(h is de afstand tussen AB en CD)

22b $O(\Delta ADS) = O(\Delta ADC) - O(\Delta CDS)$
$= O(\Delta BDC) - O(\Delta CDS)$
$= O(\Delta BCS)$.

22c Veronderstel dat $PS < QS$.
Dan $O(\Delta APS) < O(\Delta BQS)$ en $O(\Delta DPS) < O(\Delta CQS)$.
Dus $O(\Delta ADS) < O(\Delta BCS)$.
In tegenspraak met onderdeel 22b $\Rightarrow$ er geldt niet $PS < QS$.
Op dezelfde manier leidt "$PS > QS$" tot een tegenspraak.
Dus $PS = QS$.

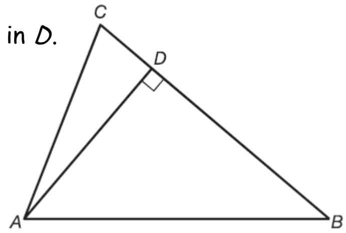


23a Gegeven: ΔABC met $\angle C = 90°$. Te bewijzen: $BC^2 + AC^2 = AB^2$.
Bewijs: Teken de hoogtelijn CD.

$$\left.\begin{array}{l} \angle A = \angle A \\ \angle C = \angle D = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ACB \backsim \Delta ADC \text{ (hh)} \Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AC^2 = AD \cdot AB \text{ (1)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle B = \angle B \\ \angle C = \angle D = 90° \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BCA \backsim \Delta BDC \text{ (hh)} \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{BA}{BC} \Rightarrow BC^2 = BD \cdot AB \text{ (2)}.$$

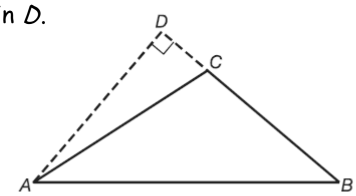
Uit **(1)** en **(2)** volgt nu: $AC^2 + BC^2 = AD \cdot AB + BD \cdot AB = (AD + BD) \cdot AB = AB \cdot AB = AB^2$.



23b Gegeven: ΔABC met $BC^2 + AC^2 = AB^2$. Te bewijzen: $\angle C = 90°$.
Bewijs: **I** Veronderstel $\angle C < 90°$, dan snijdt de hoogtelijn uit A de zijde BC in D.
In ΔACD is: $AD^2 + CD^2 = AC^2$ (Pythagoras)
In ΔABD is: $\underline{AD^2 + BD^2 = AB^2 \text{ (Pythagoras)}}$ −

$$CD^2 - BD^2 = AC^2 - AB^2$$
$$AB^2 = AC^2 + BD^2 - CD^2$$
$$AB^2 = AC^2 + (BD + CD) \cdot (BD - CD)$$
$$AB^2 = AC^2 + BC \cdot (BD - CD) < AC^2 + BC \cdot BC \Rightarrow AB^2 < AC^2 + BC^2.$$

Dit is in tegenspraak met het gegeven $\Rightarrow$ veronderstelling **I** is onjuist.



II Veronderstel $\angle C > 90°$, dan snijdt de hoogtelijn uit A de zijde BC in D.
In ΔACD is: $AD^2 + CD^2 = AC^2$ (Pythagoras)
In ΔABD is: $\underline{AD^2 + BD^2 = AB^2 \text{ (Pythagoras)}}$ −

$$CD^2 - BD^2 = AC^2 - AB^2$$
$$AB^2 = AC^2 + BD^2 - CD^2$$
$$AB^2 = AC^2 + (BD + CD) \cdot (BD - CD)$$
$$AB^2 = AC^2 + (BD + CD) \cdot BC > AC^2 + BC \cdot BC \Rightarrow AB^2 > AC^2 + BC^2.$$

Dit is in tegenspraak met het gegeven $\Rightarrow$ veronderstelling **II** is onjuist.
$\angle C < 90°$ en $\angle C > 90°$ zijn onjuist $\Rightarrow \angle C = 90°$.

24 Vermoeden: $\angle A$ en de hoek tussen k en koorde BC zijn gelijk.

25ab Vermoeden: De drie cirkels gaan door één punt.

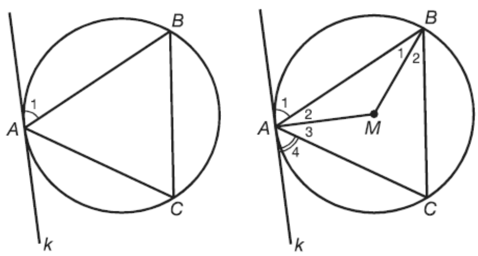
25c Vermoeden: $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$.

26a Gegeven: Een cirkel met koorde AB, raaklijn k in A aan de cirkel en een punt C op de grootste boog AB.
Te bewijzen: $\angle A_1 = \angle ACB$.
Bewijs: Teken het middelpunt M en de stralen AM en BM.

$$\left.\begin{array}{l} \angle A_2 = \angle B_1 \text{ (gelijkbenige driehoek)} \\ \angle A_2 + \angle B_1 + \angle AMB = 180° \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} 2 \cdot \angle A_2 + \angle AMB = 180° \Rightarrow \angle A_2 + \frac{1}{2}\angle AMB = 90° \\ \angle A_2 + \angle A_1 = 90° \text{ (raaklijn)} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle A_1 = \frac{1}{2}\angle AMB \\ \angle ACB = \frac{1}{2}\angle AMB \text{ (omtrekshoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1 = \angle ACB.$$

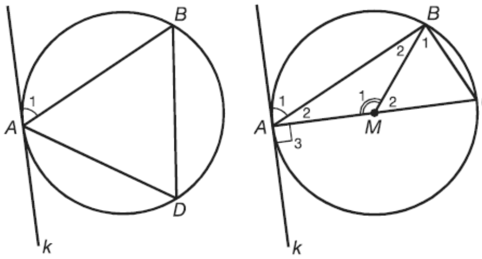


26b Gegeven: Een cirkel met koorde AB, raaklijn k in A aan de cirkel en een punt D op de grootste boog AB.
Te bewijzen: $\angle A_1 = \angle D$.
Bewijs: Teken middellijn AC en lijnstuk BC.

$$\left.\begin{array}{l}\angle B_{12} = 90^\circ \text{ (Thales)} \\ \angle A_{12} = 90^\circ \text{ (raaklijn)} \\ \angle A_2 = \angle B_2 \text{ (gelijkbenige driehoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

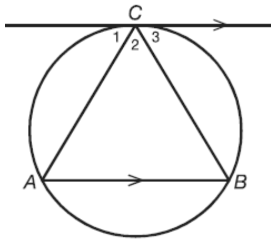
$$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 = \angle B_1 \\ \angle B_1 = \angle C \text{ (gelijkbenige driehoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle A_1 = \angle C \\ \angle C = \angle D \text{ (constante hoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1 = \angle D.$$



27 Gegeven: De punten A, B en C op een cirkel met de raaklijn in C evenwijdig met koorde AB.
Te bewijzen: ΔABC is gelijkbenig.
Bewijs: Teken AC en BC.

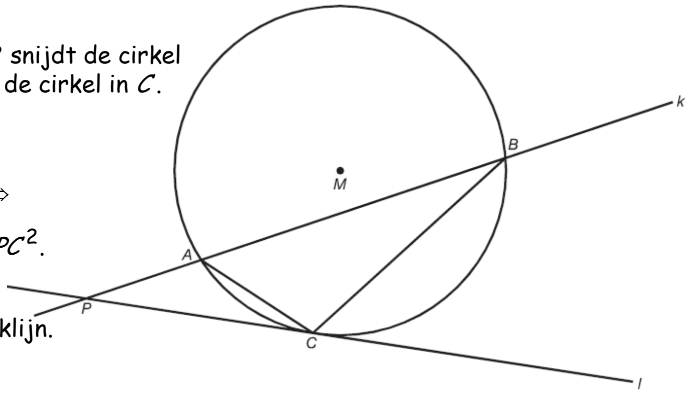
$$\left.\begin{array}{l}\angle B = \angle C_3 \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle A = \angle C_3 \text{ (hoek tussen koorde en raaklijn)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle B = \angle A \Rightarrow \Delta ABC \text{ is gelijkbenig.}$$



28 Gegeven: Een punt P buiten een cirkel, lijn k door P snijdt de cirkel in de punten A en B en lijn l door P raakt de cirkel in C.
Te bewijzen: $PA \cdot PB = PC^2$.
Bewijs: Teken AC en BC.

$$\left.\begin{array}{l}\angle PCA = \angle B \text{ (hoek tussen koorde en raaklijn)} \\ \angle P = \angle P\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Delta PCA \backsim \Delta PBC \text{ (hh)} \Rightarrow \frac{PC}{PB} = \frac{PA}{PC} \Rightarrow PA \cdot PB = PC^2.$$



29a Volgens de stelling van de hoek tussen koorde en raaklijn.

29b $\angle PBC = \angle PCA$ (hoek tussen koorde en raaklijn).
$\angle PCA = \angle PAB$ (hoek tussen koorde en raaklijn).

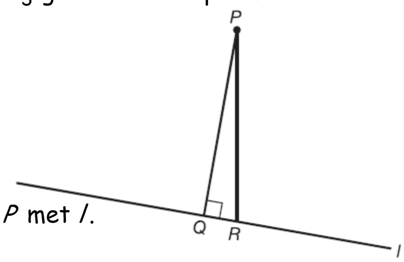
29c Noem T het snijpunt van c_1 en c_2.

$$\left.\begin{array}{l}T \text{ op } c_1 \Rightarrow \angle TAB = \angle TBC \text{ (29a)} \\ T \text{ op } c_2 \Rightarrow \angle TBC = \angle TCA \text{ (29b)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle TAB = \angle TCA \Rightarrow T \text{ op } c_3 \text{ (29b)} \Rightarrow c_1,\ c_2 \text{ en } c_3 \text{ gaan door één punt.}$$

30 Gegeven: Lijn l, een punt P niet op l en het punt Q op l zo, dat $PQ \perp l$.
Te bewijzen: PQ is de kortste verbinding van P met l.

Bewijs:
$$\left.\begin{array}{l}PQ^2 + QR^2 = PR^2 \text{ (Pythagoras)} \\ QR^2 > 0 \text{ (} R \text{ valt niet samen met } Q\text{)}\end{array}\right\} \Rightarrow PQ^2 < PR^2 \Rightarrow PQ < PR.$$

Omdat R een willekeurig punt op l is, is PQ de kortste verbinding van P met l.



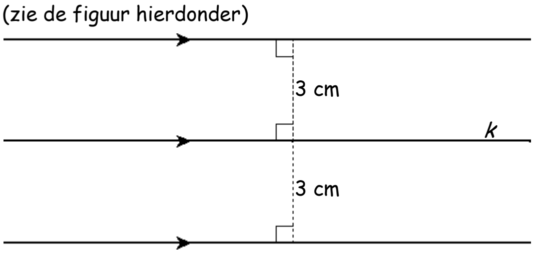
31a $d(P,A) = d(P,B) \Rightarrow P$ op de middelloodlijn van AB.

31b $d(P,k) = d(P,l)$ (en k snijdt l) $\Rightarrow P$ op de twee bissectrices (hoekdeellijnen) van de hoeken tussen (de lijnen) k en l.

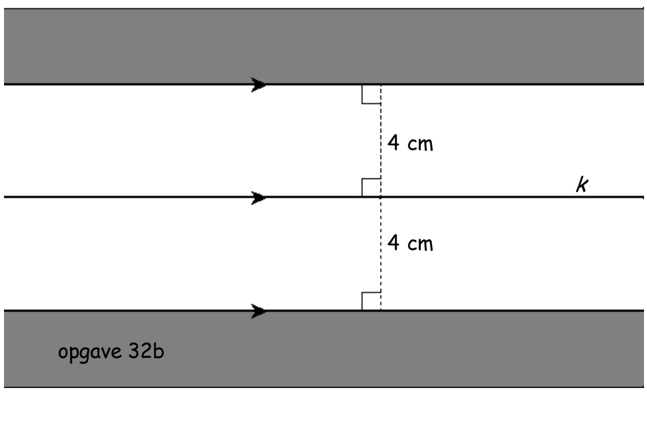
31c $d(P,m) = d(P,n)$ (met $m \parallel n$) $\Rightarrow P$ op de lijn evenwijdig met m en n, die gelijke afstand heeft tot m en tot n.

31d $d(P,M) = 3 \Rightarrow P$ op de cirkel met middelpunt M en straal 3 (Notatie: $\odot(M, 3)$).

32a $d(P,k) = 3 \Rightarrow P$ op de lijnen op afstand 3 van k.
(zie de figuur hierdonder)

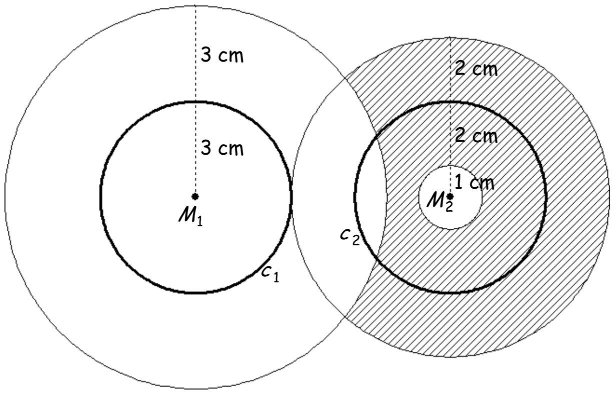


32b $d(P,k) = 4 \Rightarrow P$ op de lijnen op afstand 4 van k.
$d(P,k) \geq 4 \Rightarrow P$ op of buiten de lijnen op afstand 4 van k.

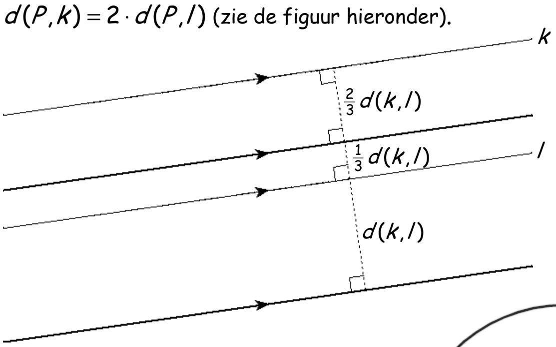


33a $d(P,c_1) = d(P,c_2) \Rightarrow P$ op de middelloodlijn van M_1M_2.
(teken nu zelf in het werkboek de middeloodlijn van M_1M_2)

33b $d(P,c_1) = 3 \Rightarrow P$ op $\odot(M_1, 6)$.
$d(P,c_2) = 2 \Rightarrow P$ op $\odot(M_2, 5)$ of $\odot(M_2, 1)$.
$d(P,c_1) \geq 3 \wedge$ (én) $d(P,c_2) \leq 2$ is dan het gearceerde gebied (met rand) in de figuur hiernaast.

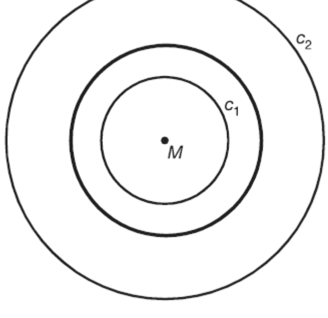


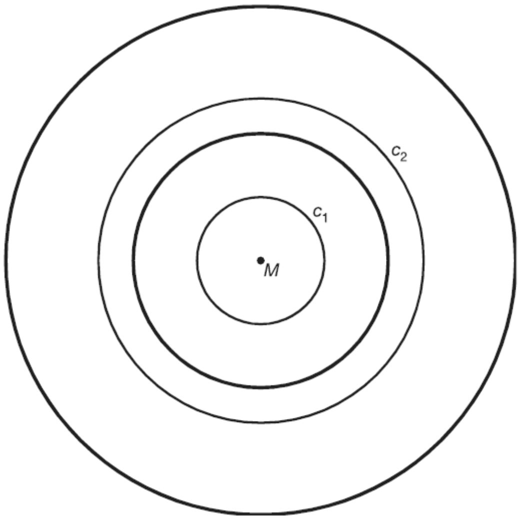
34 $d(P,k) = 2 \cdot d(P,l)$ (zie de figuur hieronder).



35a $d(P,c_1) = 2 \cdot d(P,c_2)$.
(zie de rechter figuur hiernaast)

35b $d(P,c_2) = 2 \cdot d(P,c_1)$.
(zie de linker figuur hiernaast)



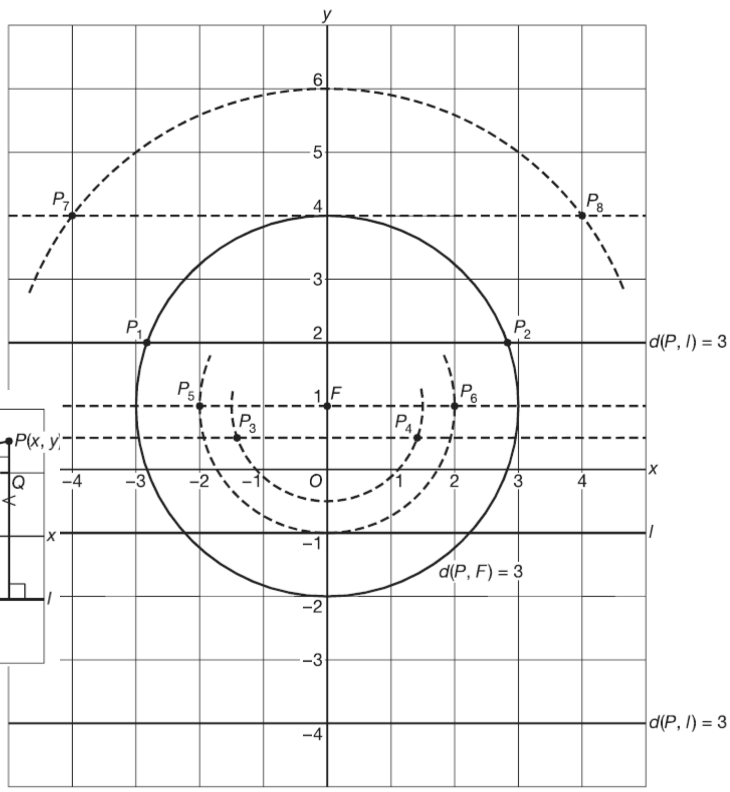


36a Zie de figuur naast 36c.

36b Voor $O(0,0)$ is $d(P,F) = d(P,l) = 1$.
(zie de rechter figuur hiernaast)

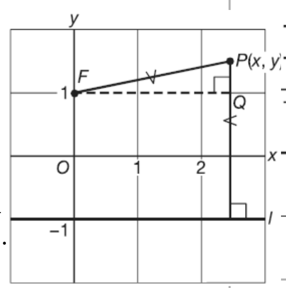
36c $d(P,F) = 3 \Rightarrow P$ op $\odot(F, 3)$.
$d(P,l) = 3 \Rightarrow P$ op de lijnen op afstand 3 van l.
$d(P,F) = \mathrm{d}(P,l) = 3 \Rightarrow P = P_1$ of $P = P_2$.
(zie de figuur hiernaast)

36d $d(P,F) = d(P,l) = 1{,}5 \Rightarrow P = P_3$ of $P = P_4$.
$d(P,F) = d(P,l) = 2 \Rightarrow P = P_5$ of $P = P_6$.
$d(P,F) = d(P,l) = 5 \Rightarrow P = P_7$ of $P = P_8$.
(zie de figuur hiernaast)
Vermoeden: de punten P liggen op een parabool als $d(P,F) = d(P,l)$.



36e $d(P,l) = d(P, x\text{-as}) + 1 = y_P + 1 = y + 1$.

36f Pythagoras in ΔFQP:
(zie de inzet hiernaast)
$FP^2 = PQ^2 + FQ^2$ met
$PQ = y_P - y_Q = y - 1$ en
$FQ = x_Q - x_F = x_P - 0 = x$.
Dus $FP^2 = (y-1)^2 + x^2 \Rightarrow$
$FP = d(P,F) = \sqrt{(y-1)^2 + x^2}$.



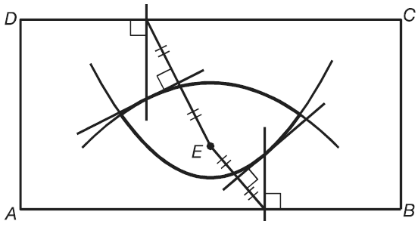
36g $d(P,F) = d(P,l) \Rightarrow$
$\sqrt{(y-1)^2 + x^2} = y + 1$ (kwadrateren) $\Rightarrow$
$(y-1)^2 + x^2 = (y+1)^2 \Rightarrow$
$y^2 - 2y + 1 + x^2 = y^2 + 2y + 1 \Rightarrow$
$-4y = -x^2$ (delen door -4) $\Rightarrow y = \frac{1}{4}x^2$ (de formule van een parabool).

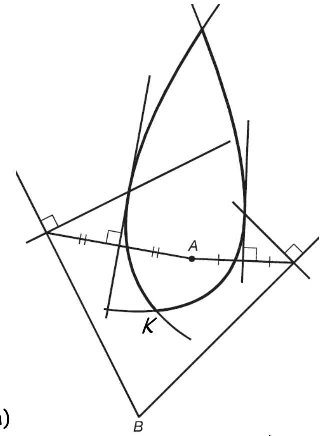
36h Ja, het vermoeden in 36d klopt.

37 C ligt op de meetkundige plaats $\Rightarrow d(C,\text{lijnstuk } AB) = d(C,l)$
$d(C,\text{lijnstuk } AB) = d(C,A)$, want $AC \perp AB$
$\Rightarrow d(C,A) = d(C,l) \Rightarrow C$ ligt op een van de parabolen.
$d(C,\text{lijnstuk } AB) = d(C,A) = d(C,\text{lijn } AB)$, want $AC \perp AB \Rightarrow d(C,\text{lijn } AB) = d(C,l) \Rightarrow C$ ligt op de bissectrice.
Op dezelfde manier volgt dat D op een van de parabolen en de bissectrice ligt.

38 $\left.\begin{array}{l} PF = PV \text{ (} P \text{ op de middelloodlijn van } FV\text{)} \\ d(P,F) = PF \text{ en } d(P,l) = PV \end{array}\right\} \Rightarrow d(P,F) = d(P,l) \Rightarrow P$ ligt op de parabool met brandpunt F en richtlijn l.

39 De meetkundige plaats bestaat uit delen van de parabolen met brandpunt E en richtlijnen AB, BC, CD en AD.
Bij het tekenen blijkt het voldoende te zijn de parabolen met brandpunt E en richtlijnen AB en CD te tekenen.
(zie de figuur hiernaast)





40a De meetkundige plaats bestaat uit delen van de parabolen met brandpunt A en richtlijnen de benen van hoek B.
(zie de figuur hiernaast)

40b Punt K is een knik op de meetkundige plaats. (het maakt niet uit welk van de twee knikken)
$\left.\begin{array}{l} K \text{ op de parabool met brandpunt } A \text{ en richtlijn het linkerbeen van hoek } B \Rightarrow d(K,A) = d(K,\text{linkerbeen}) \\ K \text{ op de parabool met brandpunt } A \text{ en richtlijn het rechterbeen van hoek } B \Rightarrow d(K,A) = d(K,\text{rechterbeen}) \end{array}\right\} \Rightarrow$
$d(K,\text{linkerbeen}) = d(K,\text{rechterbeen}) \Rightarrow K$ ligt op de bissectrice van hoek B.

41a *
41b *
41c *
41d Vermoeden: lijn m is raaklijn van de parabool.
41e Vermoeden: lijn m is bissectrice van $\angle FPV$.
41f *
41g Ja

42a *
42b Vermoeden: lijn m raakt aan de meetkundige plaats.
42c Vermoeden: lijn m is bissectrice van $\angle FPV$.
42d Ja

43a $\left.\begin{array}{l} d(Q,l) < d(Q,V) \text{ (afstand tot lijn)} \\ d(Q,V) = d(Q,F) \text{ (middelloodlijn)} \end{array}\right\} \Rightarrow d(Q,l) < d(Q,F).$

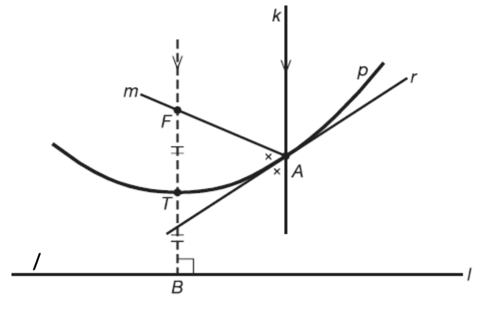
43b $\left.\begin{array}{l} \text{voor } P \text{ op de parabool geldt: } d(P,l) = d(P,V) \\ \text{voor } Q \text{ geldt: } d(Q,l) < d(Q,V) \end{array}\right\} \Rightarrow Q$ ligt buiten de parabool.

43c $\left.\begin{array}{l} P \text{ ligt op de parabool en op } m \text{ en alle andere} \\ \text{punten van } m \text{ liggen buiten de parabool} \end{array}\right\} \Rightarrow m$ raakt de parabool.

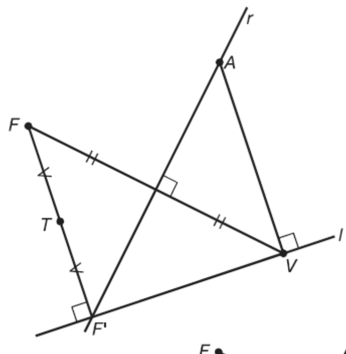
43d Het snijpunt van m met FV noemen we S.
$\left.\begin{array}{l} PF = PV \text{ (parabool)} \\ FS = SV \text{ (middelloodlijn)} \\ PS = PS \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta PSF \cong \Delta PSV \text{ (ZZZ)} \Rightarrow \angle FPS = \angle VPS$ ofwel m maakt gelijke hoeken met PF en PV.

44 Gebruik figuur 12.45 in het boek.
- k is de lijn door A (loodrecht op de richtlijn, dus) evenwijdig aan de symmetrieas.
- $\angle(k,r) = \angle(r,AF) \Rightarrow$ brandpunt F.
- $FT = BT \Rightarrow l$ (door B, loodrecht op de symmetrieas).

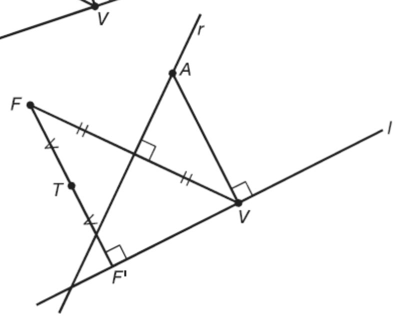
(zie de figuur hieronder)

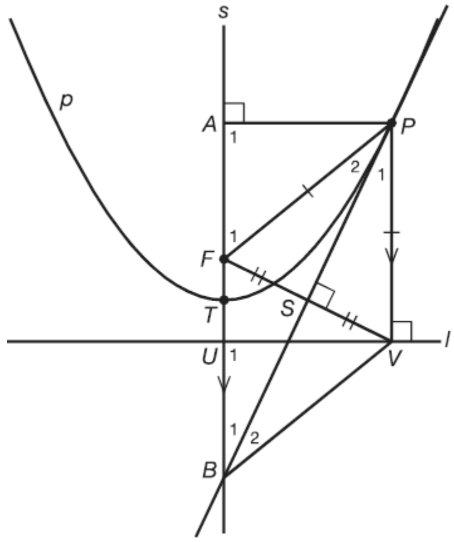


45 Gebruik figuur 12.45 in het boek.
- F spiegelen in $r \Rightarrow V$.
- l door V, loodrecht op AV.
- T is het midden van FF'. (zie de figuur hieronder)



46 Gebruik figuur 12.45 in het boek.
- $AV \perp l \Rightarrow V$ op l .
- V spiegelen in $r \Rightarrow F$.
- T is het midden van FF'. (zie de figuur hiernaast)





47a Zie de figuur hiernaast.

47b Gegeven: zie opgave 47 in het boek.
Te bewijzen: Vierhoek $BVPF$ is een ruit.
Bewijs: Teken FV en het snijpunt S van BP en FV.

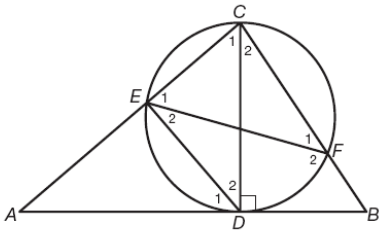
$$\left.\begin{array}{l} PF = PV \text{ (parabool) en } BV = BF \text{ (middelloodlijn)} \\ \left.\begin{array}{l} FS = SV \text{ (middelloodlijn)} \\ \angle FSB = \angle VSP = 90^\circ \\ PV \,//\, s \Rightarrow \angle P_1 = \angle B_1 \text{ (Z-hoeken)} \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta BSF \cong \Delta PSV \text{ (ZHH)} \Rightarrow BF = PV \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$PF = PV = BF = BV \Rightarrow BVPF$ is een ruit.

47c Gegeven: zie opgave 47 in het boek.
Te bewijzen: $AT = BT$.
Bewijs: Het snijpunt van l en s noemen we U.

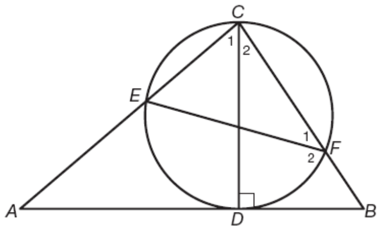
$$\left.\begin{array}{l} TU = TF \text{ (parabool)} \\ AU = PV \text{ (rechthoek)} \\ PV = BF \text{ (ruit)} \end{array}\right\} \Rightarrow AU = BF \Rightarrow AU - TU = BF - TF \Rightarrow AT = BT.$$

Diagnostische toets



D1a Teken DE.

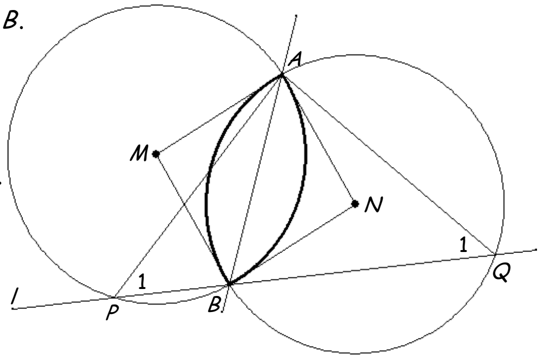
$$\left.\begin{array}{l}\angle F_1 = \angle D_2 \text{ (constante hoek)}\\ \angle E_{12} = 90^\circ \text{ (Thales)}\\ \angle C_1 + \angle E_{12} + \angle D_2 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle C_1 + 90^\circ + \angle F_1 = 180^\circ \Rightarrow \angle C_1 + \angle F_1 = 90^\circ.$$



D1b Gegeven: zie opgave D1 in het boek.
Te bewijzen: $ABFE$ is een koordenvierhoek.
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l}\angle A + \angle C_1 + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \angle A + \angle C_1 = 90^\circ\\ \angle C_1 + \angle F_1 = 90^\circ \text{ (zie D1a)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle F_1.$$

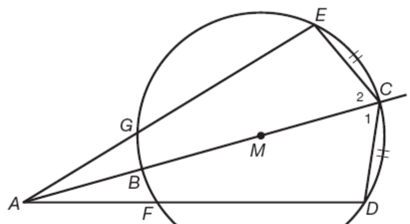
Dus $\angle A + \angle F_2 = \angle F_1 + \angle F_2 = 180^\circ \Rightarrow ABFE$ is een koordenvierhoek.



D2 Gegeven: Twee cirkels met gelijke straal die elkaar snijden in A en B.
De lijn l gaat door B en snijdt de cirkels in P en Q.
Te bewijzen: $AP = AQ$.
Bewijs: Noem de middelpunten van de cirkels M en N.

$$\left.\begin{array}{l}MA = NA \text{ (= straal)}\\ MB = NB \text{ (= straal)}\\ AB = AB\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABM \cong \Delta ABN \text{ (ZZZ)} \Rightarrow \angle M = \angle N.$$

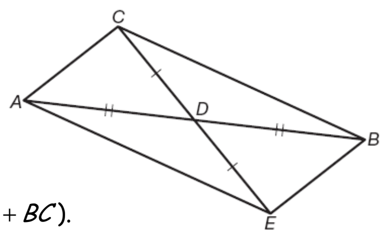
$$\left.\begin{array}{l}\angle M = \angle N \text{ (zie hierboven)}\\ \angle P_1 = \tfrac{1}{2}\angle M \text{ (omtrekshoek)}\\ \angle Q_1 = \tfrac{1}{2}\angle N \text{ (omtrekshoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle P_1 = \angle Q_1 \Rightarrow \Delta PAQ \text{ is gelijkbenig} \Rightarrow AP = AQ.$$



D3 Gegeven: Cirkel c met middelpunt M en punt A buiten de cirkel.
Lijn AM snijdt de cirkel in B en C.
Op c liggen D en E zo, dat boog CD = boog CE.
Te bewijzen: $\angle CAE = \angle CAD$.
Bewijs: Teken CE en CD.

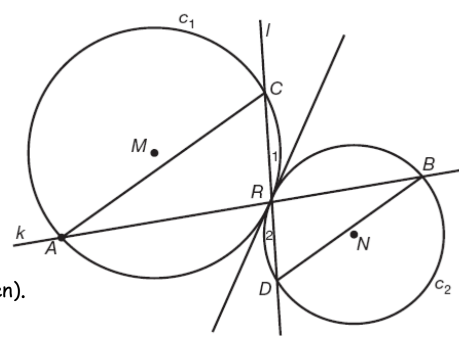
$$\left.\begin{array}{l}\text{boog } CD = \text{boog } CE\\ BC \text{ is middellijn}\end{array}\right\} \Rightarrow \text{boog } BD = \text{boog } BE \Rightarrow \angle C_1 = \angle C_2.$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle C_1 = \angle C_2 \text{ (zie hierboven)}\\ AC = AC\\ CD = CE \text{ (boog en koorde)}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ADC \cong \Delta AEC \text{ (ZHZ)} \Rightarrow \angle CAD = \angle CAE.$$



D4 Gegeven: ΔABC met zwaartelijn CD.
Te bewijzen: $CD < \frac{1}{2}(AC + BC)$.
Bewijs: Verleng CD met $DE = CD$ en teken vierhoel $AEBC$.
AB en CE delen elkaar middendoor, dus $AEBC$ is een parallellogram.

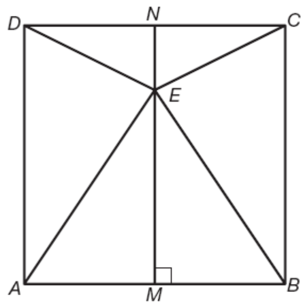
$$\left.\begin{array}{l}CE < AC + AE \text{ (driehoeksongelijkheid)}\\ CE = 2CD\\ AE = BC \text{ (parallellogram)}\end{array}\right\} \Rightarrow 2CD < AC + BC \Rightarrow CD < \tfrac{1}{2}(AC + BC).$$



D5 Gegeven: Cirkel c_1 met middelpunt M en cirkel c_2
met middelpunt N, die elkaar raken in R.
Lijn k gaat door R en snijdt c_1 in A en c_2 in B.
Lijn l gaat door R en snijdt c_1 in C en c_2 in D.
Te bewijzen: $AC \mathbin{//} BD$.
Bewijs: Teken de gemeenschappelijke raaklijn van c_1 en c_2 in R.

$$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle R_1 \text{ (hoek tussen koorde en raaklijn)}\\ \angle R_1 = \angle R_2 \text{ (overstaane hoeken)}\\ \angle R_2 = \angle B \text{ (hoek tussen koorde en raaklijn)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle A = \angle B \Rightarrow AC \mathbin{//} BD \text{ (Z-hoeken).}$$

D6 Gegeven: Vierkant $ABCD$ met daarin punt E zo, dat $\angle EDC = \angle ECD = 15^\circ$.
Te bewijzen: ΔABE is gelijkzijdig.
Bewijs: Uit het gegeven volgt dat $DE = CE$ en $AE = BE$, dus het vierkant is symmetrisch in de lijn MN, waarbij M het midden is van AB en N het midden van CD.
Veronderstel dat ΔABE niet gelijkzijdig is, dan is $\angle BAE < 60^\circ$ of $\angle BAE > 60^\circ$.



I Veronderstel $\angle BAE < 60° \Rightarrow \angle DAE > 30°$ en $\angle ABE < 60°$.

$\left.\begin{array}{r} \angle BAE < 60° \text{ en } \angle ABE < 60° \Rightarrow AE < AB \\ AB = AD \end{array}\right\} \Rightarrow AE < AD.$

$\left.\begin{array}{l} \angle DAE > 30° \Rightarrow \angle ADE + \angle AED < 150° \\ AE < AD \Rightarrow \angle ADE < \angle AED \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ADE < 75° \Rightarrow \angle EDC > 15°.$

Dit is in tegenspraak met het gegeven $\Rightarrow \angle BAE < 60°$ is onjuist **(1)**

II Veronderstel $\angle BAE > 60° \Rightarrow \angle DAE < 30°$ en $\angle ABE > 60°$.

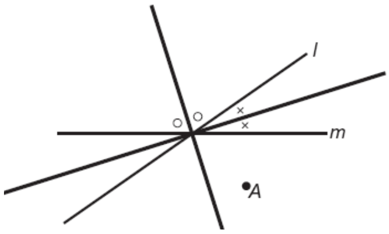
$\left.\begin{array}{r} \angle BAE > 60° \text{ en } \angle ABE > 60° \Rightarrow AE > AB \\ AB = AD \end{array}\right\} \Rightarrow AE > AD.$

$\left.\begin{array}{l} \angle DAE < 30° \Rightarrow \angle ADE + \angle AED > 150° \\ AE > AD \Rightarrow \angle ADE > \angle AED \end{array}\right\} \Rightarrow \angle ADE > 75° \Rightarrow \angle EDC < 15°.$

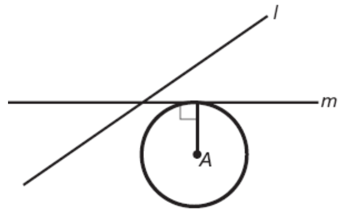
Dit is in tegenspraak met het gegeven $\Rightarrow \angle BAE > 60°$ is onjuist **(2)**

Uit **(1)** en **(2)** volgt $\angle BAE = 60°$ ($= \angle ABE$) $\Rightarrow \Delta ABE$ is gelijkzijdig.

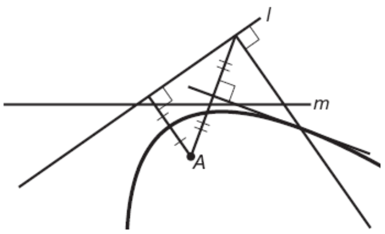
D7a $d(P,l) = d(P,m)$ met als meetkundige plaats de bissectrices van de hoeken tussen l en m.



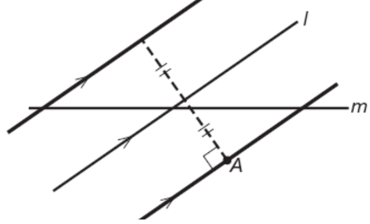
D7d $d(P,A) = d(A,m)$ met als meetkundige plaats de cirkel met middelpunt M en straal $r = d(A,m)$.



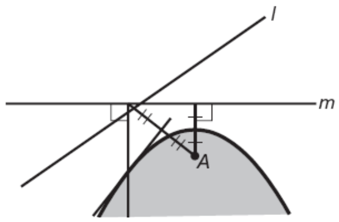
D7b $d(P,A) = d(P,l)$ met als meetkundige plaats de parabool met brandpunt A en richtlijn l.



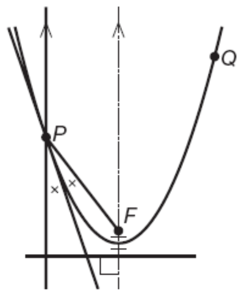
D7e $d(P,l) = d(A,l)$ met als meetkundige plaats de lijnen op afstand $d(A,l)$ van l (evenwijdig met l).

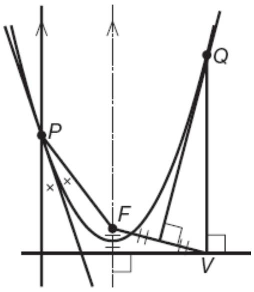


D7c $d(P,A) \leq d(P,m)$ met als meetkundige plaats de parabool met brandpunt A en richtlijn m als ook het gebied binnen deze parabool.



D8a Teken de lijn door P evenwijdig aan de symmetrieas.
Spiegel deze lijn in de raaklijn door P.
Het snijpunt van de gespiegelde lijn en de symmetrieas is het brandpunt F.
F spiegelen in de top geeft een punt op de richtlijn.
De richtlijn staat loodrecht op de symmetrieas.





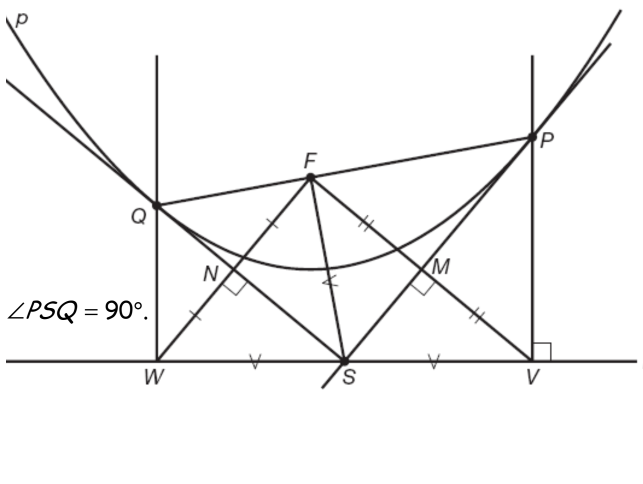
D8b Voor het brandpunt en de richtlijn zie D8a.
Teken het voetpunt V van Q.
De middelloodlijn van FV is de raaklijn in Q.

D9 Gegeven: Parabool p met richtlijn l en brandpunt F.
De raaklijnen k en m snijden elkaar in S op l.
Te bewijzen: $\angle PSQ = 90°$.
Bewijs: Teken $PV \perp l$ en $QW \perp l$.
Teken QP, FS, VF en WF.

$\left.\begin{array}{l} S \text{ op de middelloodlijn van } FV \Rightarrow SV = SF \\ S \text{ op de middelloodlijn van } FW \Rightarrow SW = SF \end{array}\right\} \Rightarrow$

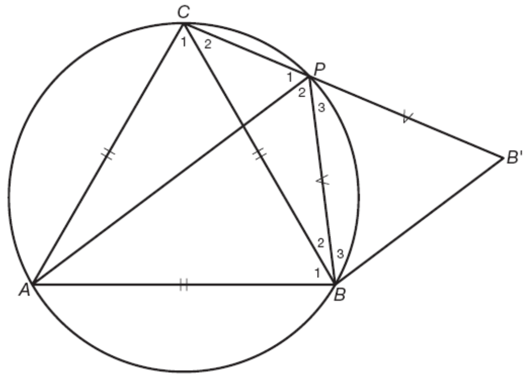
F op cirkel met middellijn $VW \Rightarrow \angle WFV = 90°$ (Thales).

$\left.\begin{array}{l} \angle WFV = 90° \\ \angle M = 90° \text{ (raaklijn is middelloodlijn van } FV) \\ \angle N = 90° \text{ (raaklijn is middelloodlijn van } FW) \\ \angle WFV + \angle M + \angle N + \angle PSQ = 360° \text{ (hoekensom vierhoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle PSQ = 90°.$



Gemengde opgaven 12. Bewijzen in de vlakke meetkunde

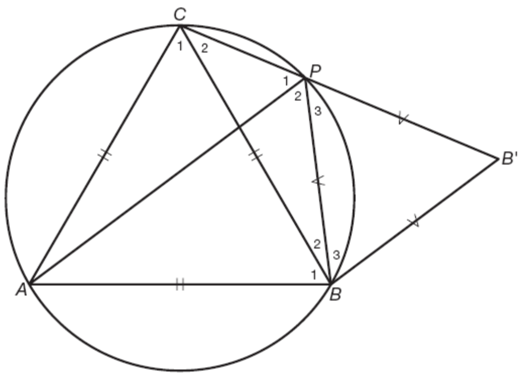
G1a Zie de figuur hiernaast.



G1b Gegeven: Gelijkzijdige ΔABC met zijn omgeschreven cirkel.
Punt P ligt op de kortste boog BC en B' ligt op het het verlengde van CP zo, dat $PB' = PB$.
Te bewijzen: $\Delta BB'P$ is gelijkzijdig.
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} \angle P_1 = \angle B_1 = 60^\circ \text{ (constante hoek)} \\ \angle P_2 = \angle C_1 = 60^\circ \text{ (constante hoek)} \\ \angle P_{123} = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle P_3 = 60^\circ.$$

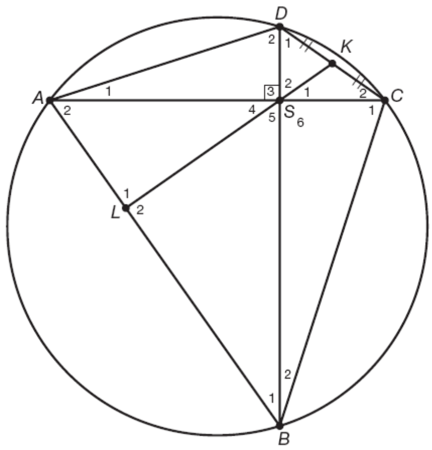
Dus $\Delta BB'P$ is een gelijkbenige driehoek met een tophoek van $60^\circ \Rightarrow \Delta BB'P$ is gelijkzijdig.



G1c Gegeven: Gelijkzijdige ΔABC met zijn omgeschreven cirkel.
Punt P ligt op de kortste boog BC en B' ligt op het het verlengde van CP zo, dat $PB' = PB$.
Te bewijzen: $AP = BP + CP$.
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} AB = BC \\ BP = BB' \\ \left.\begin{array}{l} \angle B_{12} = 60^\circ + \angle B_2 \\ \angle B_{23} = 60^\circ + \angle B_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \angle B_{12} = \angle B_{23} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \Delta ABP \cong \Delta CBB' \text{ (ZHZ)} \\ \text{dus } AP = CB'. \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} AP = CB' = CP + PB' \\ BP = PB' \end{array}\right\} \Rightarrow AP = CP + BP.$$



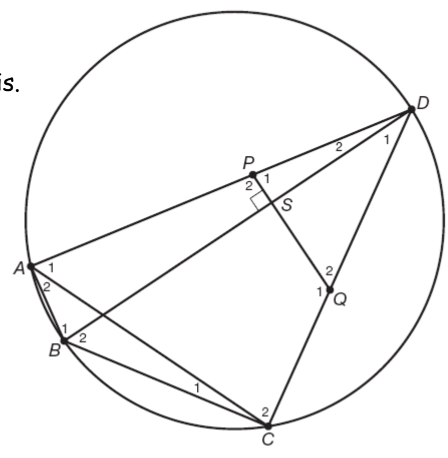
G2a Gegeven:
Koordenvierhoek $ABCD$ met $AC \perp BD$ en punt K op CD zo, dat $CK = DK$.
Het snijpunt van de diagonalen is S en L is het snijpunt van KS en AB.
Te bewijzen: $\angle ASL = \angle KCS$.
Bewijs:
$\angle S_{12} = 90^\circ$ en $CK = DK \Rightarrow$
K is het middelpunt van de omgeschreven cirkel van ΔCDS (Thales).

$$\left.\begin{array}{l} \text{Dus } KS = KC \Rightarrow \angle S_1 = \angle C_2 \\ \angle S_1 = \angle S_4 \text{ (overstaande hoeken)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle C_2 = \angle S_4, \text{ dus } \angle ASL = \angle KCS.$$

G2b Gegeven:
Koordenvierhoek $ABCD$ met $AC \perp BD$ en punt K op CD zo, dat $CK = DK$.
Het snijpunt van de diagonalen is S en L is het snijpunt van KS en AB.
Te bewijzen: $KL \perp AB$.
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \angle D_1 + \angle C_2 + \angle S_{12} = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \\ \angle S_{12} = 90^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \angle D_1 + \angle C_2 = 90^\circ \\ \angle D_1 = \angle A_2 \text{ (constante hoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_2 + \angle C_2 = 90^\circ.$$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \angle A_2 + \angle C_2 = 90^\circ \\ \angle C_2 = \angle S_4 \text{ (zie G2a)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_2 + \angle S_4 = 90^\circ \\ \angle A_2 + \angle S_4 + \angle L_1 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle L_1 = 90^\circ \Rightarrow KL \perp AB.$$



G3 Gegeven:
Koordenvierhoek $ABCD$ waarbij BD middellijn van de omgeschreven cirkel is.
Punt P ligt op AD en punt Q op CD zo, dat $PQ \perp BD$.
Te bewijzen: $PACQ$ is een koordenvierhoek.
Bewijs:
S is het snijpunt van PQ en BD.

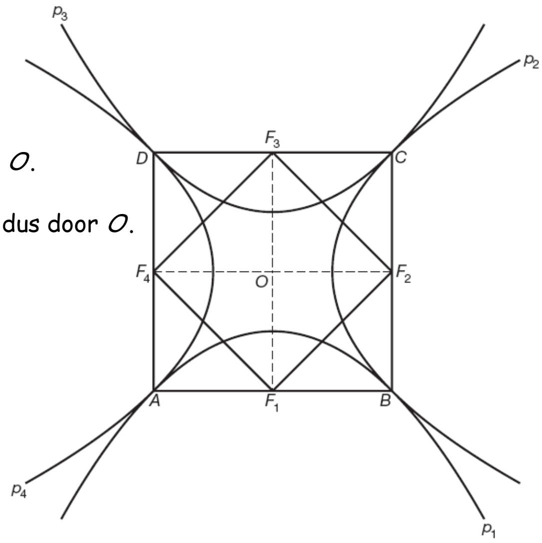
$$\left.\begin{array}{l} BD \text{ is middellijn} \Rightarrow \angle A_{12} = 90^\circ \text{ (Thales)} \\ \angle S = 90^\circ \\ \angle A_{12} + \angle B_1 + \angle S + \angle P_2 = 360^\circ \text{ (hoekensom vierhoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle B_1 + \angle P_2 = 180^\circ.$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle B_1 + \angle P_2 = 180^\circ \\ \angle B_1 = \angle C_2 \text{ (constante hoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle C_2 + \angle P_2 = 180^\circ.$$

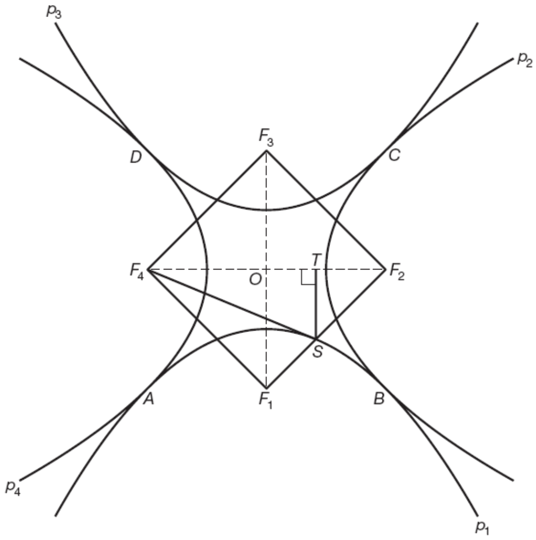
Dus $PACQ$ is een koordenvierhoek (koordenvierhoek).

G4a

Gegeven: Zie opgave G4 in het boek.
Te bewijzen: p_1 en p_2 raken elkaar.
Bewijs:
Teken vierkant $ABCD$ met AB door F_1 en $AB \,//\, F_2F_4$;
BC door F_2 en $BC \,//\, F_1F_3$; CD door F_3 en $CD \,//\, F_2F_4$ en
AD door F_4 en $AD \,//\, F_1F_3$. Het snijpunt van F_1F_3 en F_2F_4 is O.
$BF_1 = BF_2 = d(B, F_2F_4) \Rightarrow B$ op p_1 (parabool).
De raaklijn in B aan p_1 is de bissectrice van $\angle F_1BF_2$ en gaat dus door O.
Evenzo ligt B op p_2 en gaat de raaklijn in B aan p_2 door O.
Dus de parabolen p_1 en p_2 raken elkaar dus in B.



G4b



Gegeven: Zie opgave G4 in het boek.
Parabool p_1 snijdt de zijde F_1F_2 in S
Te bewijzen: F_4 ligt op de raaklijn aan p_1 in S.
Bewijs: Teken SF_4 en $ST \perp F_2F_4$.

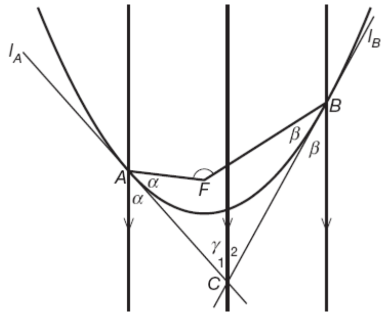
$$\left.\begin{array}{l} S \text{ op } p_1 \Rightarrow SF_1 = ST \text{ (parabool)} \\ \angle SF_1F_4 = \angle STF_4 = 90^\circ \\ SF_4 = SF_4 \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta SF_1F_4 \cong \Delta STF_4 \text{ (ZZR)} \Rightarrow$$

$\angle F_1SF_4 = \angle TSF_4 \Rightarrow SF_4$ is raaklijn van p_1 (raaklijneigenschap).
Dus F_4 ligt op de raaklijn aan p_1 in S.

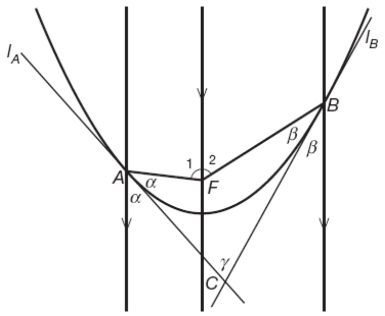
G5a

Gegeven: Zie opgave G5 in het boek.
Te bewijzen: $\gamma = \alpha + \beta$.
Bewijs: Spiegel α in l_A en β in l_B.
De gespiegelde lijnen staan loodrecht op de richtlijn (raaklijn parabool).
Teken door C een lijn evenwijdig met de gespiegelde lijnen.

$$\left.\begin{array}{l} \angle C_1 = \alpha \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle C_2 = \beta \text{ (Z-hoeken)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle C_{12} = \gamma = \alpha + \beta.$$

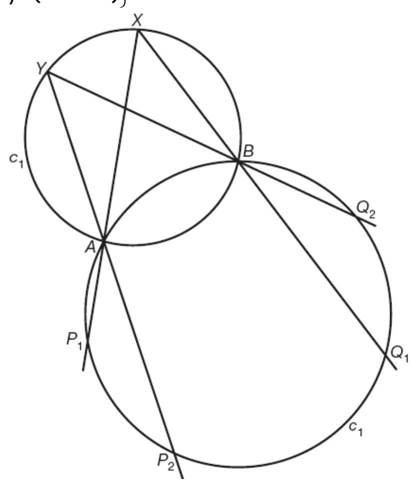


G5b



Gegeven: Zie opgave G5 in het boek.
Te bewijzen: $\angle AFB = 2\gamma$.
Bewijs: Spiegel α in l_A en β in l_B.
De gespiegelde lijnen staan loodrecht op de richtlijn (raaklijn parabool).
Teken door F een lijn evenwijdig met de gespiegelde lijnen.

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \angle F_1 = 2\alpha \text{ (Z-hoeken)} \\ \angle F_2 = 2\beta \text{ (Z-hoeken)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle F_{12} = 2\alpha + 2\beta \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \gamma = \alpha + \beta \text{ (zie G5a)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle F_{12} = \angle AFB = 2\gamma.$$



G6

Gegeven: Zie opgave G6 in het boek.
Te bewijzen: De bogen P_1Q_1 en P_2Q_2 zijn even groot.
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} \angle YAX = \angle YBX \text{ (constante hoek)} \\ \angle YAX = \angle P_1AP_2 \text{ (overstaande hoeken)} \\ \angle YBX = \angle Q_1AQ_2 \text{ (overstaande hoeken)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle P_1AP_2 = \angle Q_1AQ_2 \Rightarrow \text{boog } P_1P_2 = \text{boog } Q_1Q_2.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{boog } P_1P_2 = \text{boog } Q_1Q_2 \\ \text{boog } P_1Q_1 = \text{boog } P_1P_2 + \text{boog } P_2Q_1 \\ \text{boog } P_2Q_2 = \text{boog } Q_1Q_2 + \text{boog } P_2Q_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{boog } P_1Q_1 = \text{boog } P_2Q_2.$$

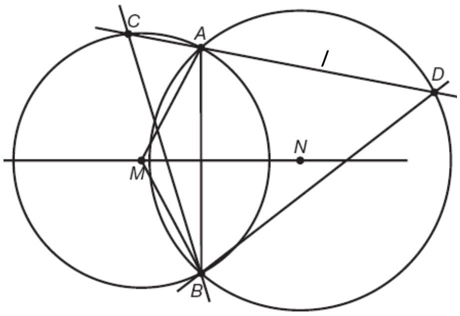
G7a

$$\left.\begin{array}{l}\angle D \text{ is onafhankelijk van de stand van } l \text{ (constante hoek)}\\ \angle C_1 = \angle BCA \text{ is onafhankelijk van de stand van } l \text{ (constante hoek)} \Rightarrow\\ \angle C_2 = \angle BCD \text{ is onafhankelijk van de stand van } l \ (\angle C_1 + \angle C_2 = 180^\circ)\\ \angle CBD + \angle BCD + \angle D = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle CBD \text{ is onafhankelijk van de stand van } l.$$

G7b

Gegeven: Zie opgave G7 in het boek.
Te bewijzen: $\angle AMN = \angle ACB$.
Bewijs: Teken AM, BM en AB.

$$\left.\begin{array}{l}\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AMB \text{ (omtrekshoek)}\\ \Delta AMB \text{ is gelijkbenig} \Rightarrow \angle AMN = \frac{1}{2}\angle AMB\end{array}\right\} \Rightarrow \angle AMN = \angle ACB.$$

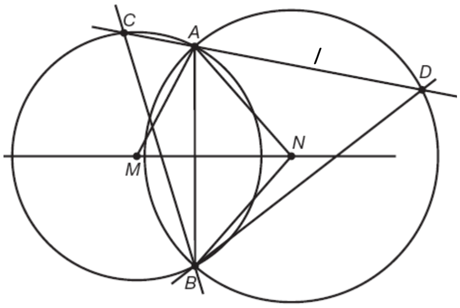


G7c

Gegeven: Zie opgave G7 in het boek.
Te bewijzen: $\angle MAN = \angle CBD$.
Bewijs: Teken AM, AN, BN en AB.

$$\left.\begin{array}{l}\angle ADB = \frac{1}{2}\angle ANB \text{ (omtrekshoek)}\\ \Delta ANB \text{ is gelijkbenig} \Rightarrow \angle ANM = \frac{1}{2}\angle ANB\end{array}\right\} \Rightarrow \angle ANM = \angle ADB.$$

$$\left.\begin{array}{l}\angle MAN + \angle AMN + \angle ANM = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}\\ \angle AMN = \angle ACB = \angle DCB\\ \angle ANM = \angle ADB = \angle CDB\\ \angle CBD + \angle DCB + \angle CDB = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle MAN = \angle CBD.$$



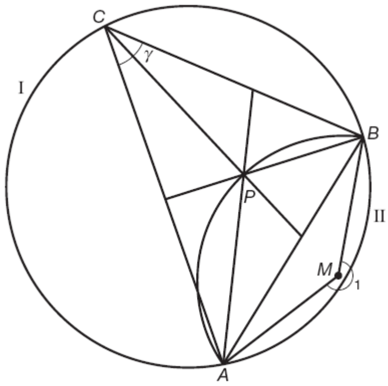
G8a

Gegeven: Zie opgave G8 in het boek.
Te bewijzen: $\angle APB = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$.
Bewijs: Noem $\angle BAC = \alpha$ en $\angle ABC = \beta$.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \Rightarrow \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\gamma = 90^\circ\\ \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\beta + \angle APB = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow 90^\circ - \frac{1}{2}\gamma = 180^\circ - \angle APB \Rightarrow \angle APB = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma.$$

G8b

Gegeven: Zie opgave G8 in het boek.
Te bewijzen: De baan die P beschrijft is een cirkelboog.
Bewijs:
De grootte van γ verandert niet als C over boog I beweegt (constante hoek) $\Rightarrow$
de grootte van $\angle APB = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$ verandert niet als C over boog I beweegt $\Rightarrow$
de baan van P is een cirkelboog (constante hoek).



G8c

$\angle APB = 90^\circ + \frac{1}{2}\gamma$ (zie G8a) $= \frac{1}{2}\angle M_1$ (omtrekshoek) $\Rightarrow \angle M_1 = 180^\circ + \gamma$.

$$\left.\begin{array}{l}\angle M_1 = 180^\circ + \gamma\\ \angle AMB + \angle M_1 = 360^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \angle AMB + 180^\circ + \gamma = 360^\circ \Rightarrow \angle AMB = 180^\circ - \gamma.$$

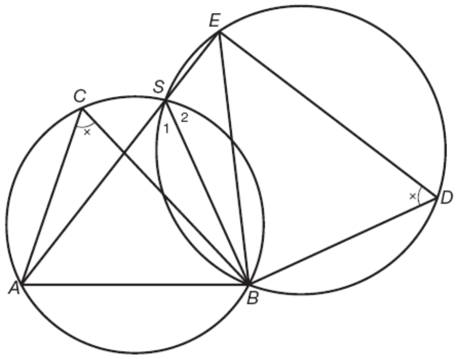
G8d

Gegeven: Zie opgave G8 in het boek.
Te bewijzen: M ligt op boog II.
Bewijs: $\angle AMB + \gamma = 180^\circ - \gamma + \gamma = 180^\circ \Rightarrow AMBC$ is een koordenvierhoek (koordenvierhoek) $\Rightarrow M$ ligt op boog II.

G9

Gegeven: ΔABC en ΔBDE met $\angle ACB = \angle BDE$. De omgeschreven cirkels van deze driehoeken snijden elkaar in B en in S.
Te bewijzen: S ligt op de lijn AE.
Bewijs: Teken AS, BS en SE.

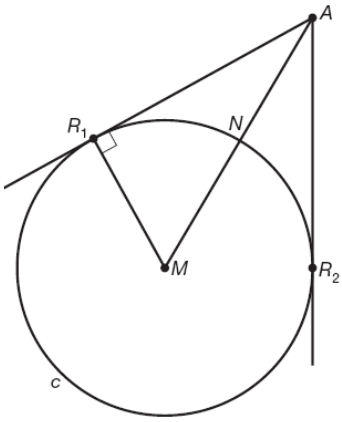
$$\left.\begin{array}{l}\angle D + \angle S_2 = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)}\\ \angle D = \angle C\\ \angle C = \angle S_1 \text{ (constante hoek)}\end{array}\right\} \Rightarrow \angle S_1 + \angle S_2 = 180^\circ \Rightarrow S \text{ op } AE.$$



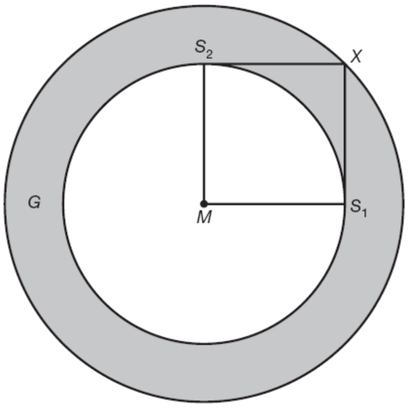
G10a Het snijpunt van AM met de cirkel is N.
boog $R_1R_2 = \frac{1}{3}$ van de omtrek van c, dus $\angle R_1MR_2 = \frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$.

$$\left.\begin{array}{l} \angle R_1MA = \frac{1}{2}\angle R_1MR_2 = \frac{1}{2} \cdot 120° = 60° \\ \angle R_1 = 90° \text{ (raaklijn)} \end{array}\right\} \Rightarrow AM = 2 \cdot MR_1 = 2 \cdot r = 2 \cdot MN.$$

Dus $AN = MN \Rightarrow$ de afstand van A tot c is de helft van AM.



G10b



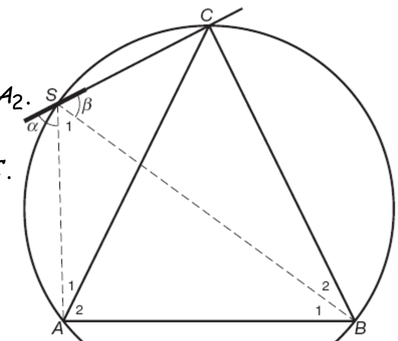
In het grensgeval met $\alpha = 90°$ is XS_1MS_2 een viekant,
immers de hoeken bij S_1 en S_2 zijn 90° en $MS_1 = MS_2$.
De zijde van dit vierkant is $r \Rightarrow MX = r\sqrt{2}$.

$O(G) = O(\text{cirkel met straal } r\sqrt{2}) - O(\text{cirkel met straal } r)$
$= \pi \cdot (r\sqrt{2})^2 - \pi \cdot 2^2 = 2\pi r^2 - \pi r^2 = O(c)$

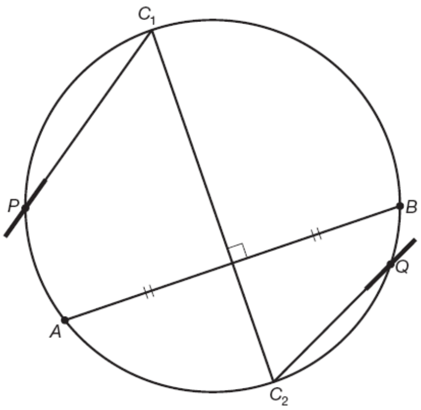
G11a

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \angle B_{12} + \angle S_1 + \beta = 180° \text{ (koordenvierhoek)} \\ \alpha + \angle S_1 + \beta = 180° \text{ (gestrekte hoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle B_{12} = \alpha \\ \angle A_2 = \beta \text{ (constante hoek)} \\ \alpha = \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \angle B_{12} = \angle A_2.$$

Dus $\angle BAC = \angle ABC$.

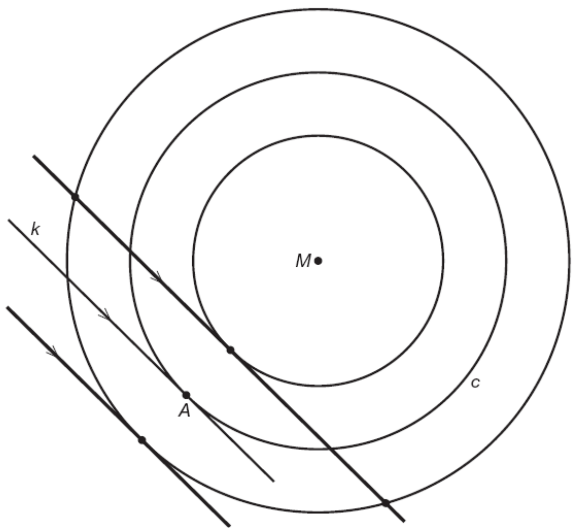


G11b

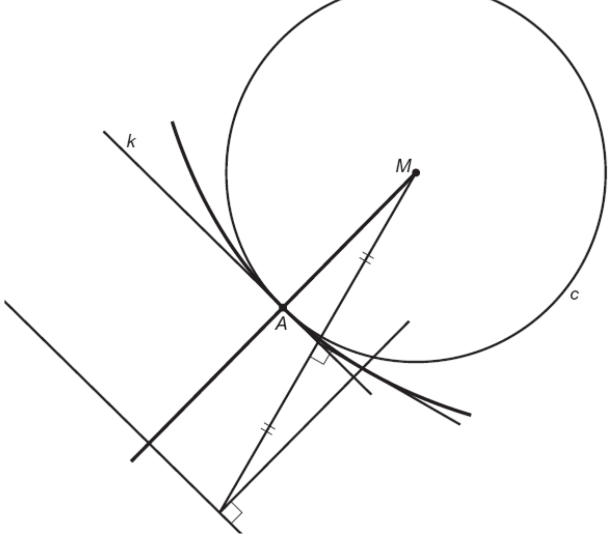


De middelloodlijn van AB snijdt de cirkel in C_1 en C_2.
(omdat C_1 en C_2 op de middelloodlijn van AB liggen geldt:
$\angle C_1AB = \angle C_1BA$ en $\angle C_2AB = \angle C_2BA$)
Uit de omgekeerde bewering volgt nu dat de spiegeltjes in de richtingen PC_1 en QC_2 getekend moeten worden.

G12a Teken twee lijnen evenwijdig met k op afstand 1 cm van k,
de cirkel met middelpunt M en straal 2 cm en
de cirkel met middelpunt M en straal 4 cm.



G12b

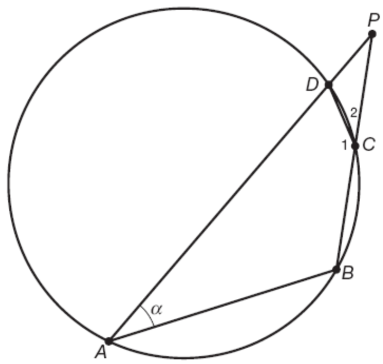


De meetkundige plaats is de halve lijn MA
en de parabool met brandpunt M en de
richtlijn evenwijdig met k op afstand 3 cm van k.

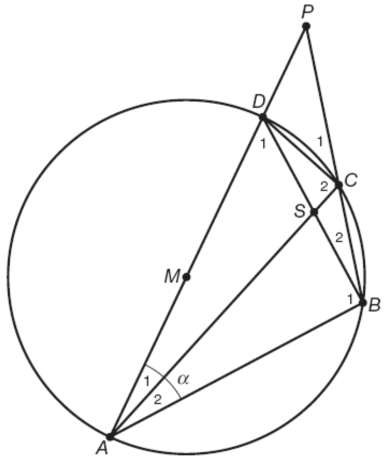
G13a Gegeven: Zie opgave G13 in het boek.
Te bewijzen: $DC = DP$.
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} AB = BP \Rightarrow \angle P = \angle A = \alpha \text{ (gelijkbenige driehoek)} \\ \left.\begin{array}{l} \angle C_1 + \alpha = 180^\circ \text{ (koordenvierhoek)} \\ \angle C_1 + \angle C_2 = 180^\circ \text{ (gestrekte hoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle C_2 = \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \angle P = \angle C_2.$$

Dus ΔCDP is een gelijkbenige driehoek en hieruit volgt $DC = DP$.



G13b



Gegeven: Zie opgave G13 in het boek.
Te bewijzen: $\angle ASD = 3\alpha$.
Bewijs:

$$\left.\begin{array}{l} \angle B_1 = 90^\circ \text{ (Thales)} \\ \alpha + \angle B_1 + \angle D_1 = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle D_1 = 90^\circ - \alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle P = \alpha \text{ (zie G13a)} \\ \left.\begin{array}{l} \angle C_1 = \alpha \text{ (zie G13a)} \\ \angle C_2 = 90^\circ \text{ (Thales)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle C_{12} = 90^\circ + \alpha \\ \angle A_1 + \angle P + \angle C_{12} = 180^\circ \text{ (hoekensom driehoek)} \end{array}\right\} \Rightarrow \angle A_1 + \alpha + 90^\circ + \alpha = 180^\circ \Rightarrow \angle A_1 = 90^\circ - 2\alpha.$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle A_1 + \angle D_1 + \angle ASD = 180^\circ \text{ (hoekensom drieh)} \\ \angle D_1 = 90^\circ - \alpha \\ \angle A_1 = 90^\circ - 2\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow 90^\circ - 2\alpha + 90^\circ - \alpha + \angle ASD = 180^\circ \Rightarrow \angle ASD = 3\alpha.$$